Colles de Maths - semaine 8
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— Toute suite convergente est bornée
— Théorèmes d'encadrement
— Théorème de la limite monotone
— Théorème des suites adjacentes
— Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 1 Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Exercice 2 Soit $x \in]0,1[$. Étudier la convergence de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$p_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^n}).$$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$.
Montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{\varphi(n)} - n \to 0$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 On admet le théorème suivant :
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in G$, $x - y \in G$. Alors G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel a.

1. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a, b \neq 0$ et $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que, si $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, alors l'ensemble $\{e^{in\theta},\, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle unité.
3. Montrer que l'ensemble $\{2^a 5^b,\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection telle que la suite $\left(\dfrac{\varphi(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 7 Montrer que l'équation à inconnue dans $\mathbb{R}$
$$x + x^2 + ... + x^n = 1$$
admet une unique solution x_n dans $[0,1]$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{... + \sqrt{a_n}}}}$$

1. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n) dans le cas où la suite (a_n) est constante égale à 1.
2. Montrer que (u_n) converge si est seulement si
$$\exists A \geq 0,\, \forall n \geq 1,\, a_n \leq A^{2^n}.$$

Exercice 9 Étudier la bonne définition et la convergence de la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}.$$